

東邦学誌第49巻第2号
2020年12月
論文

黄金比の学習 —数学的活動—

Lessons on Golden Ratio : Mathematical Activities

柿原 聖治

Seiji Kakihara

愛知東邦大学 教育学部

黄金比に関する内容や研究は多岐にわたっていて、つかみ所がないほどである。そこで、黄金比について流れのある授業を行って、黄金比への学生の理解を促した。また、数式から入るのではなく、活動を中心としたことから入った。コンパス、折り紙を使ったりして、ものづくりができる活動にした。そのことにより、身近なところに数学が潜んでいることに気づかせることができた。「数学に活動があって新鮮だった」という学生の反応が多く、数学的活動の楽しさを味わわせることができた。

1. はじめに

黄金比に関する内容や研究は多岐にわたっていて、つかみ所がないほどである。そこで、黄金比について流れのある授業を行って、黄金比への学生の理解を促した。また、数式から入るのではなく、活動を中心としたことから入った。

この研究は、黄金比について一連の数学的活動を提示することである。全学部の学生41名（2年生～4年生）を対象にした講義で実践した。

2. 黄金比を捜す

2.1 黄金長方形、白銀長方形

まず黄金比と白銀比の数値を確認した（1.618と1.414）。それから学生に身近な物を取り上げ、縦と横の長さを測って、その比を出すように言った。縦横比から黄金比・白銀比のどちらの比になっているかを判断させた。学生はキャッシュカードや葉書、絵画、建物などを例として挙げていた。美術関係は黄金比、印刷物は白銀比が相対的に多いことに気づかせた。

2.2 フィボナッチ数列

次に、フィボナッチ数列の問題を提示した。

下の数字は、ある法則に従って並んでいる。() に当てはまる数を答えよ。

1、 1、 2、 3、 5、 8、 13、 21、 34、 ()、 89、 144 、……

***** 答 55 *****

自然界にはフィボナッチ数列が多く見られる。しかし、黄金比よりも見つけるのが難しい。1年ごとの木の枝分かれがフィボナッチ数列になっていることが、小学校の教科書に載っていることを紹介した¹⁾。また、茎につく葉の間隔、花卉の数、穂の並び方などがフィボナッチ数になっていることも紹介した。

そして、フィボナッチ数列の隣り合う数を割り算させた。たとえば $8 \div 5$ や、 $144 \div 89$ 。隣り合う数の割り算はどこをとってもほぼ一定 (1.6) になる。数列と黄金比は、全く無関係のように思われるが、非常に関連深いことに気づかせた。

そのことを図形的に理解させるために、フィボナッチ数列の各項を一辺とする正方形を書かせた (図1)。この長方形の縦横比が黄金比に近い。長方形を無限に大きくしていくと、縦横比が黄金比になる。

次に、この長方形に $\frac{1}{4}$ 円を加え、黄金らせ線を描かせた (図2)。普通に描くだけでは面白くないので、黄金らせ線に当てはまる図形を考えて描かせた。多くの学生が貝殻を描いていた。実際に、黄金らせ線は、オウム貝の巻き方や葛飾北斎の「富嶽三十六景」の構図に使われていることについても話をした。

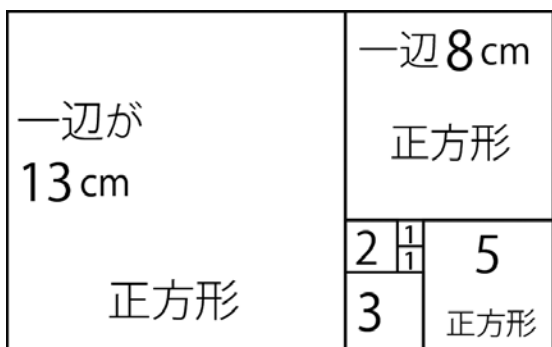


図1 フィボナッチ数列の各項を一辺とする正方形

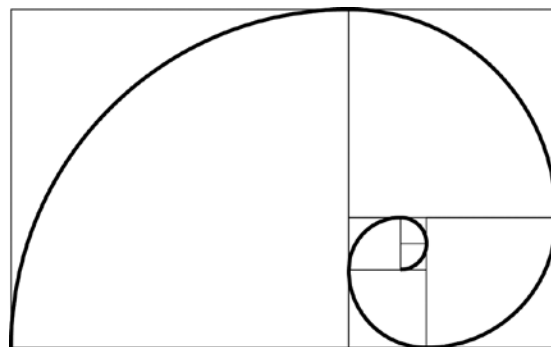


図2 黄金らせ線

数列に類似したパスカルの三角形を取り上げた (図3)。この中にもフィボナッチ数列が入っていることを教えた。パスカルの三角形は小学校の教科書にも2ページに渡って載っていることを紹介した²⁾。

以上より学生は、黄金らせ線やフィボナッチ数列について理解していった。



図3 パスカルの三角形

3. 黄金比を計算する

3.1 黄金長方形

黄金長方形の理解のために、物差しを使わずに、簡単に白銀比・黄金比であるか、否かを見つける方法を教えた (図4)。

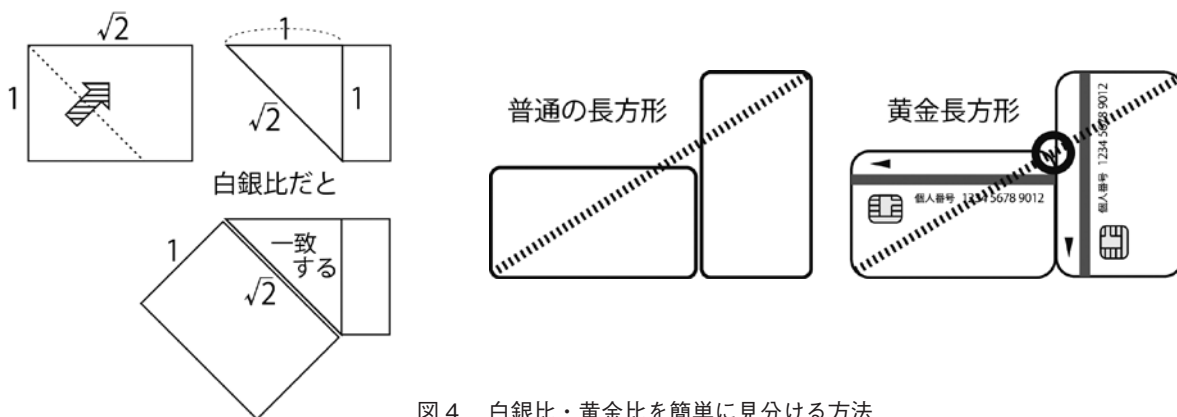


図4 白銀比・黄金比を簡単に見分ける方法

ここで黄金比の基本的な考え方を示し、数式を出すことにした。黄金比は直線を黄金分割することから導入することが多いが、長方形がイメージしやすいので、長方形の分割から入った。白銀比と対比して理解させることも容易になる。白銀比($\sqrt{2}$)は、紙を半分にしても縦横比は変わらないものであるということを説明した。

長方形から正方形を切り取り、残った長方形が元の長方形と相似になる長方形は、黄金長方形だけである(図5)。この性質から、黄金長方形か否かを即座に判断する方法が導かれることを理解させた(図6)。

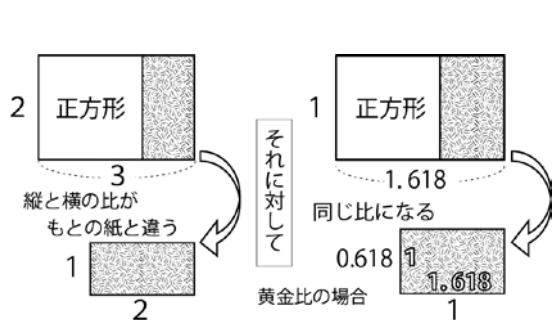


図5 黄金比の基本的な考え方

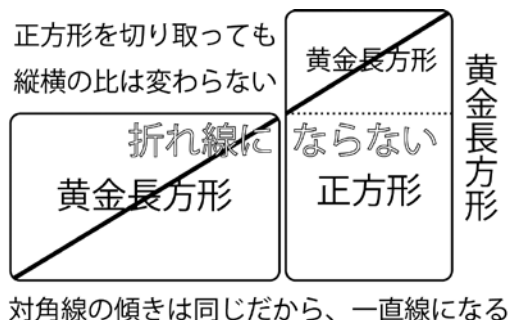


図6 頂点が一直線に来る理由

さらに、黄金比を導く数式を示した(図7)。黄金比は、二次方程式の正の解であることを理解させた。

長方形から正方形を切り取ると、長方形ができる。
相似になるように、 x を求める

$$1 : x = (x - 1) : 1$$

$$x(x - 1) = 1$$

$$x^2 - x - 1 = 0$$

二次方程式を解いて、
正の解を求める

$$x = \frac{\sqrt{5} + 1}{2} = \tau$$

$$\approx 1.618 \quad \text{黄金比}$$

図7 黄金比の数式の導出

$$x^2 - x - 1 = 0 \quad \text{この式の解が黄金比 } \tau \text{ である}$$

$$\tau^2 - \tau - 1 = 0 \quad \text{両辺を } \tau \text{ で割ると}$$

$$\tau - 1 - (1/\tau) = 0$$

$$\tau - 1 = (1/\tau) \quad \text{黄金比 } \tau \text{ の逆数を } \rho \text{ とすると}$$

$$\tau - 1 = \rho = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \approx 0.618 \quad \text{黄金比}$$

$$\rho \text{ は } x^2 + x - 1 = 0 \text{ の方程式の正の解}$$

図8 黄金比とその逆数の関係

また、黄金比 τ の逆数 ρ もよく使うので、その関係を示した(図8)。

以上より学生は、白銀比・黄金比を簡単に見分ける方法とその理論を理解していった。

3.2 黄金三角形

黄金比を多く含む黄金三角形に関する問題を解かせた（図9）。

AB=ACである二等辺三角形ABCがある。∠Bの二等分線と辺ACとの交点をDとすると、BC=BDになった。

①∠Aの大きさを求めよ。

②AB=1 cmのとき、BCの長さを求めよ。

①の答えは36度である。360÷36=10で、二等辺三角形なので、正十角形を円に内接させると、二等辺三角形の辺が円の半径となり、半径と辺の比は黄金比になっていることも示した（図10）。

②の答えは $(\sqrt{5}-1)/2$ で、黄金比 ρ である。△ABDは鈍角黄金三角形と言われている。

以上より学生は、黄金三角形について理解していった。

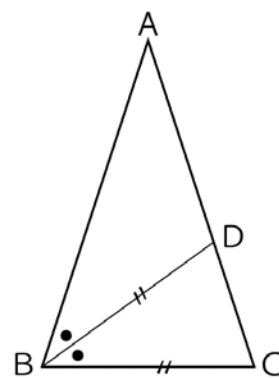


図9 黄金三角形の問題

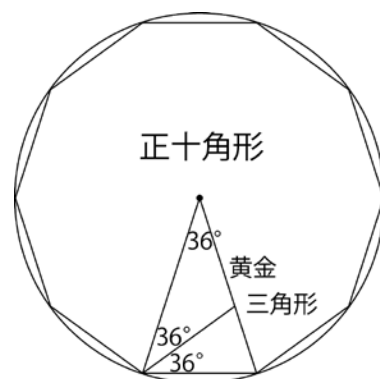


図10 正十角形と黄金三角形

4. 製作活動

4.1 コンパスによる活動

内接する正三角形を描くと、黄金比が得られる。驚いたことに、この作図法が発見されたのは1982年である³⁾。

方べきの定理（この式も簡単に導ける）を使って、解が黄金比になる二次方程式ができる（図11）。

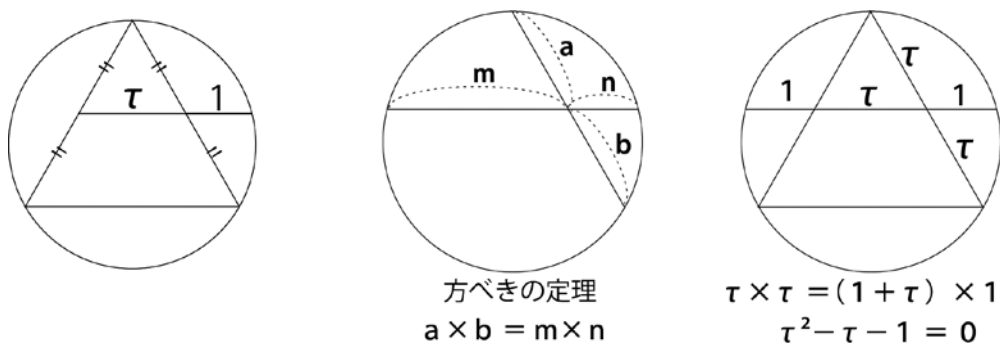


図11 黄金比の作図法

正五角形の描き方は複数ある⁴⁾。正五角形には、黄金比が数多く内在している。図12の正五角形には、黄金三角形と鈍角黄金三角形が数多く入っている。

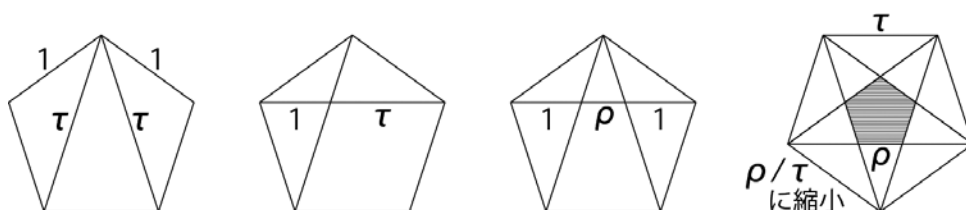


図12 正五角形と黄金比

以上より学生は、コンパスによる活動を通して、黄金比の作図法と、正五角形と黄金比について理解していった。

4.2 折り紙による活動

正方形を半分に折り、中点を見つける。中点と頂点を結ぶ斜線を引く（図13）。一方の頂点を斜線に重ねるように折ると三角形ができ、底辺と高さの比が黄金比である。その証明を図13右に書いている。活動自体は単純ですぐに終わるので、この問題（一辺2cmの正方形でdを求める）を学生に解かせて、ピタゴラスの定理を確認した。

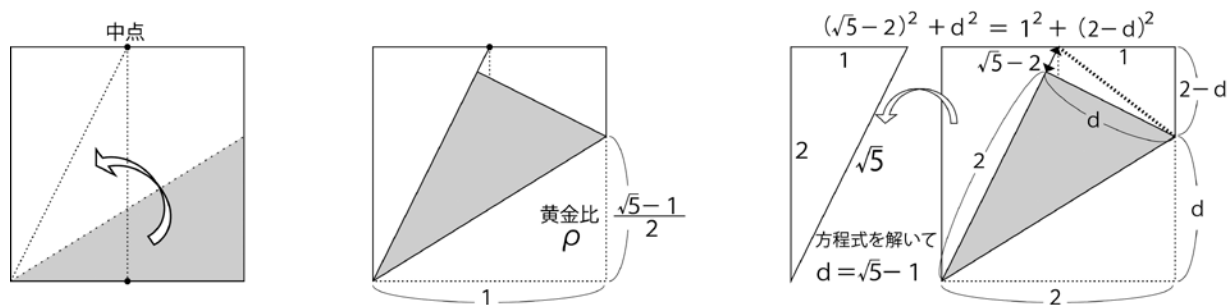


図13 折り紙で黄金比を作る

4.3 テープによる活動

紐を結ぶときと同じ結び方で、簡単に正五角形ができる（図14）。



図14 テープで正五角形を作る

これもすぐにできるので、課題を「作った正五角形に装飾を加えて、独自の作品に仕上げよ」にして、楽しくなるような飾り付けをさせて、個性が出せる課題設定にした。

5. おわりに

数式を教えることを中心とするのではなく、手を使って作図したり、コンパス、折り紙を使ったりして、ものづくりができる活動にした。

そのことにより、身近なところに数学が潜んでいることに気づかせることができた。「数学に活動があって新鮮だった」という学生の反応が多く、数学的活動の楽しさを味わわせることができた。

【文献】

1) 清水静海ほか、『わくわく算数6』, 啓林館, pp.232-233, 2016.

- 2) 清水静海ほか、『わくわく算数6』, 啓林館, pp.228-229, 2016.
- 3) アルブレヒト・ボイテルスパッヒャー, ベルンハルト・ペトリ; 柳井浩訳, 『黄金分割—自然と数理と芸術と—』, 共立出版, p.9, 2005.
- 4) H.ヴァルサー, 蟹江幸博訳, 『黄金分割』, 日本評論社, p.32, 2002.